3. *Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento*

È noto che l'elettrodinamica di Maxwell – così come viene oggi generalmente intesa – conduce, quando la si applica a corpi in movimento, ad asimmetrie che non sembrano inerenti ai fenomeni. Si prenda, per esempio, l'interazione elettrodinamica fra un magnete e un conduttore. Il fenomeno osservabile dipende in questo caso soltanto dal moto relativo di magnete e conduttore, mentre la concezione usuale traccia una netta distinzione fra i due casi, in cui l'uno o l'altro dei due corpi è in movimento. Infatti, se il magnete è in movimento e il conduttore in quiete, intorno al magnete si genera un campo elettrico con una ben definita energia, il quale produce una corrente ovunque si trovino parti del conduttore. Se invece il magnete è in quiete e si muove il conduttore, intorno al magnete non si produce alcun campo elettrico; tuttavia, nel conduttore, troviamo una forza elettromotrice alla quale non corrisponde di per sé alcuna energia, ma che, ammettendo l'uguaglianza del moto relativo nei due casi, dà origine a correnti elettriche della stessa intensità e con lo stesso percorso di quelle prodotte dalle forze elettriche nel caso precedente.

Esempi di questo tipo, uniti ai tentativi falliti di rilevare un qualche movimento della Terra rispetto al «mezzo luminifero», portano a ipotizzare che anche i fenomeni elettrodinamici, come quelli meccanici, non possiedano proprietà corrispondenti al concetto di quiete assoluta. Anzi, come è già stato mostrato per quantità del prim'ordine, le stesse leggi dell'elettrodinamica e dell'ottica saranno valide[1] per tutti i sistemi di coordinate nei quali valgono le equazioni della meccanica. Eleveremo questa congettura (il cui contenuto, d'ora in poi, sarà chiamato «principio di relatività») al rango di postulato; introdurremo, inoltre, un altro postulato, solo all'apparenza incompatibile con il precedente, cioè che la luce nello spazio vuoto si propaghi sempre con una velocità determinata, V, indipendente dallo stato di moto del corpo che la emette. Questi due postulati sono sufficienti per giungere a una teoria elettrodinamica dei corpi in movimento semplice e coerente, basata sulla teoria di Maxwell per i corpi in quiete. L'introduzione di un «etere luminifero» si rivelerà superflua, giacché la concezione che qui svilupperemo non prescriverà uno «spazio assolutamente stazionario» provvisto di speciali proprietà, né assegnerà un vettore velocità a un punto dello spazio vuoto nel quale abbiano luogo processi elettromagnetici.

Come tutta l'elettrodinamica, la teoria che verrà sviluppata, si basa sulla cinematica del corpo rigido, dato che gli enunciati di una qualsiasi teoria di questo genere riguardano le relazioni fra corpi rigidi (sistemi di coordinate), orologi, e processi elettromagnetici. La non sufficiente considerazione di questa circostanza è alla radice delle difficoltà con le quali, attualmente, deve fare i conti l'elettrodinamica dei corpi in movimento.

Parte cinematica

1. *Definizione di simultaneità*

Si consideri un sistema di coordinate nel quale valgano le equazioni della meccanica newtoniana. Per distinguerlo verbalmente da altri sistemi che verranno introdotti in seguito, e per rendere più precisa la nostra esposizione, lo chiameremo «il sistema stazionario».

Se un punto materiale è in quiete rispetto a questo sistema di coordinate, la sua posizione relativamente a esso può venire

determinata mediante un regolo misuratore rigido, usando le regole della geometria euclidea, ed essere espressa in coordinate cartesiane.

Se vogliamo descrivere il *moto* di un punto materiale, dobbiamo dare i valori delle sue coordinate in funzione del tempo. Tuttavia, si tenga presente che una descrizione matematica di questo tipo ha significato fisico solo se è già chiaro che cosa si intende per «tempo». Non dobbiamo dimenticare che tutti i nostri giudizi in cui interviene il tempo sono sempre giudizi su *eventi simultanei*. Se, per esempio, dico che «il treno arriva qui alle 7 in punto», ciò significa, in pratica, che «il posizionamento della lancetta delle ore del mio orologio sul 7 e l'arrivo del treno sono eventi simultanei»[1].

Sembrerebbe che per superare tutte le difficoltà connesse alla definizione di «tempo» basti sostituire, alla parola «tempo», «posizionamento della lancetta delle ore del mio orologio». Una tale definizione è in effetti sufficiente quando si tratta di definire un tempo solamente per il luogo ove l'orologio si trova; ma la definizione non è più soddisfacente quando si devono correlare nel tempo serie di eventi che avvengono in luoghi differenti, oppure – il che è lo stesso – determinare i tempi di eventi che si verificano in luoghi distanti dall'orologio.

Potremmo certo accontentarci di stabilire i tempi di eventi collocando un osservatore munito di orologio nell'origine delle coordinate, il quale associ a ogni evento da valutare la corrispondente posizione delle lancette dell'orologio quando un segnale luminoso proveniente da quell'evento lo raggiunge attraverso lo spazio vuoto. Sappiamo, tuttavia, dall'esperienza che una simile coordinazione ha l'inconveniente di non essere indipendente dalla posizione dell'osservatore provvisto di orologio. Con il seguente ragionamento arriviamo a una determinazione molto più pratica.

[1] Non discuteremo qui dell'inesattezza inerente al concetto di simultaneità di due eventi che si verificano (approssimativamente) nello stesso luogo, e che può essere rimossa solo per astrazione.

Supponiamo che nel punto A dello spazio vi sia un orologio; un osservatore posto in A può allora determinare il tempo di eventi che avvengano nelle immediate vicinanze di A, stabilendo quali posizioni delle lancette dell'orologio sono simultanee con quegli eventi. Se in B vi è un altro orologio in tutto e per tutto simile a quello posto in A, allora i tempi di eventi nelle immediate vicinanze di B possono essere valutati da un osservatore situato in B. Ma, senza ulteriori convenzioni, non è possibile confrontare, rispetto al tempo, un evento in A e un evento in B. Finora abbiamo definito solo un «tempo A» e un «tempo B», ma non un «tempo» comune per A e B. Quest'ultimo può essere determinato stabilendo, *per definizione*, che il «tempo» necessario alla luce per propagarsi da A a B è uguale al tempo che essa impiega per propagarsi da B ad A. Supponiamo, cioè, che un raggio di luce parta da A, diretto verso B, al «tempo A», t_A, venga riflesso da B verso A al «tempo B», t_B, e giunga di nuovo in A al «tempo A» t'_A. Per definizione, i due orologi sono sincronizzati se:

$$t_B - t_A = t'_A - t_B.$$

Assumiamo che questa definizione di sincronismo sia esente da contraddizioni, ed estensibile a un numero di punti arbitrariamente grande, e che dunque siano universalmente valide le seguenti relazioni:

1. Se l'orologio in B è sincronizzato con l'orologio in A, l'orologio in A è sincronizzato con l'orologio in B.
2. Se l'orologio in A è sincronizzato sia con l'orologio in B che con l'orologio in C, allora anche gli orologi in B e in C sono sincronizzati tra loro.

Mediante particolari esperimenti fisici (ideali), abbiamo stabilito cosa si debba intendere con orologi stazionari sincronizzati e posti in luoghi diversi, giungendo allora evidentemente alle definizioni di «sincronismo» e di «tempo». Il «tempo» di un evento è quello che si legge, simultaneamente al prodursi dell'evento stesso, su un orologio stazionario situato nel luogo

dell'evento, e sincronizzato per tutte le determinazioni temporali con un ben preciso orologio stazionario.

Conformemente all'esperienza, assumeremo inoltre che la quantità

$$\frac{2\overline{AB}}{t'_A - t_A} = V$$

sia una costante universale (la velocità della luce nello spazio vuoto).

È essenziale l'aver definito il tempo mediante orologi stazionari nel sistema stazionario; poiché il tempo ora definito è riferito a tale sistema, lo chiameremo «il tempo del sistema stazionario».

2. *Sulla relatività di lunghezze e tempi*

Le considerazioni seguenti sono basate sul principio di relatività e sul principio della costanza della velocità della luce, definiti come segue:

1. Dati due sistemi di coordinate in moto relativo traslatorio parallelo e uniforme, le leggi secondo cui si modificano gli stati di un sistema fisico non dipendono dal fatto che questi cambiamenti vengano riferiti all'uno o all'altro dei due sistemi.
2. Nel sistema di coordinate «stazionario», ogni raggio luminoso, non importa se emesso da un corpo in quiete o in movimento, si muove con una velocità fissata V. Perciò

$$\text{velocità} = \frac{\text{percorso della luce}}{\text{intervallo di tempo}},$$

dove «intervallo di tempo» è da intendere nel senso della definizione data nel paragrafo 1.

Si prenda un'asta rigida stazionaria; sia l la sua lunghezza, misurata con un regolo anch'esso stazionario. Immaginiamo ora l'asta collocata lungo l'asse X del sistema di coordinate stazionario, e che ad essa venga impresso un moto traslatorio uniforme (con velocità v) parallelamente all'asse X nel verso delle x crescenti. Ci chiediamo ora quale sia la lunghezza dell'asta *in movimento*, e immaginiamo di poterla accertare mediante le due operazioni seguenti:

a. L'osservatore si muove insieme al suddetto regolo e all'asta rigida, e misura la lunghezza dell'asta giustapponendo ad essa il regolo, così come farebbe se fosse in quiete rispetto all'uno e all'altra.

b. Mediante orologi stazionari e sincronizzati tra loro nel sistema stazionario, come indicato nel paragrafo 1, l'osservatore determina in quali punti del sistema stazionario si trovano, in un istante di tempo t dato, le due estremità dell'asta da misurare. La distanza fra quei due punti, misurata con il regolo utilizzato precedentemente – ma ora in quiete – è ancora una lunghezza che possiamo chiamare «lunghezza dell'asta».

Secondo il principio di relatività, la lunghezza determinata mediante l'operazione (*a*), che chiameremo «lunghezza dell'asta nel sistema in moto», deve essere uguale alla lunghezza l dell'asta stazionaria.

Diversa da l sarà invece la lunghezza determinata, in base ai nostri due principi, per mezzo dell'operazione (*b*), che chiameremo «la lunghezza dell'asta (in moto) nel sistema stazionario».

La cinematica tradizionale assume tacitamente che le lunghezze determinate per mezzo delle due precedenti operazioni siano esattamente uguali fra loro, ovvero, in altre parole, che un corpo rigido in movimento al tempo t sia in tutto e per tutto sostituibile, per ciò che riguarda la geometria, dallo *stesso* corpo *in quiete* in una data posizione.

Immaginiamo inoltre che alle due estremità (A e B) dell'asta siano collocati orologi sincronizzati con gli orologi del sistema stazionario, cioè tali che le loro letture corrispondano sempre al «tempo del sistema stazionario» nei luoghi che essi si trovano ad occupare; questi orologi sono dunque «sincronizzati nel sistema stazionario».

Immaginiamo poi che per ogni orologio vi sia un osservatore solidale con esso, e che questi osservatori applichino ai due

orologi il criterio di sincronizzazione formulato nel paragrafo 1. Sia dato un raggio di luce che parte da A al tempo[2] t_A, viene riflesso da B al tempo t_B, e ritorna in A al tempo t'_A. Tenendo in considerazione il principio della costanza della velocità della luce, troviamo che

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v}$$

e

$$t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V + v},$$

dove r_{AB} indica la lunghezza dell'asta mobile, misurata nel sistema stazionario. Osservatori solidali con l'asta troverebbero allora che i due orologi non sono sincronizzati, mentre osservatori nel sistema stazionario dichiarerebbero che essi lo sono.

Vediamo dunque che non è possibile attribuire un significato *assoluto* al concetto di simultaneità; due eventi considerati simultanei se osservati in un particolare sistema di coordinate, non possono più essere ritenuti tali se osservati da un altro sistema in moto rispetto al primo.

3. *Teoria delle trasformazioni delle coordinate e del tempo passando da un sistema in quiete a un sistema in moto traslatorio uniforme rispetto a esso*

Siano dati due sistemi di coordinate nello spazio «stazionario», cioè due sistemi costituiti ciascuno di tre rette materiali rigide tra loro perpendicolari uscenti da un punto. Supponiamo che gli assi X dei due sistemi coincidano, e i rispettivi assi Y e

[2] La parola «tempo» significa qui sia «tempo del sistema stazionario» sia «posizione delle lancette dell'orologio in moto situato nel punto considerato».

Z siano paralleli. Ogni sistema sia provvisto di un regolo rigido e di un certo numero di orologi, e i due regoli, come pure tutti gli orologi dei due sistemi, siano esattamente uguali.

Imprimiamo ora all'origine di uno dei due sistemi, che chiameremo k, un moto con velocità (costante) v nella direzione delle x crescenti dell'altro sistema (K), che rimane a riposo; e supponiamo che tale velocità sia comunicata agli assi coordinati del sistema k, al relativo regolo e agli orologi. Ad ogni istante t del sistema stazionario K corrisponde una determinata posizione degli assi del sistema in moto. Per ragioni di simmetria, siamo autorizzati a supporre che il moto di k possa essere tale che all'istante di tempo t («t» indica sempre il tempo del sistema in quiete) gli assi del sistema in moto siano paralleli a quelli del sistema stazionario.

Immaginiamo ora che lo spazio venga misurato sia dal sistema stazionario K, usando il regolo stazionario, sia dal sistema in moto k mediante il regolo solidale con esso, e che siano rispettivamente x, y, z e ξ, η, ζ le coordinate ottenute in questo modo. Inoltre, per mezzo degli orologi stazionari nel sistema stazionario, e impiegando segnali luminosi come descritto nel paragrafo 1, si determini il tempo t del sistema stazionario per tutti i punti nei quali si trovino orologi. In modo simile, applicando di nuovo il metodo dei segnali luminosi esposto nel paragrafo 1, si determinerà il tempo τ del sistema in moto, per tutti i punti di esso in cui si trovino orologi in quiete rispetto al sistema stesso.

Ad ogni insieme di valori x, y, z, t che determina completamente il luogo e il tempo di un evento nel sistema stazionario, corrisponde un insieme di valori ξ, η, ζ, τ che fissa quell'evento rispetto al sistema k, e il problema da risolvere consiste ora nel trovare il sistema di equazioni che collegano tra loro queste quantità.

In primo luogo, è evidente che queste equazioni devono essere *lineari* in virtù delle proprietà di omogeneità attribuite allo spazio e al tempo.

Se poniamo $x' = x - vt$, è chiaro allora che a un punto in quiete nel sistema k compete un ben preciso insieme di valori x', y, z indipendenti dal tempo. Determiniamo dapprima τ come funzione di x', y, z e t. A questo scopo, dobbiamo esprimere sotto forma di equazioni il fatto che τ è in realtà l'insieme delle letture degli orologi in quiete nel sistema k, sincronizzati secondo la regola enunciata nel paragrafo 1.

Supponiamo che, all'istante τ_0, dall'origine del sistema k venga emesso un raggio di luce lungo l'asse X verso x', e che al tempo τ_1 esso sia riflesso indietro da x' verso l'origine, dove giungerà all'istante τ_2; deve allora essere

$$\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1,$$

ovvero, introducendo gli argomenti della funzione τ e applicando il principio della costanza della velocità della luce nel sistema stazionario,

$$\frac{1}{2}\left[\tau(0, 0, 0, t) + \tau\left(0, 0, 0, \left\{t + \frac{x'}{V-v} + \frac{x'}{V+v}\right\}\right)\right]$$
$$= \tau\left(x', 0, 0, t + \frac{x'}{V-v}\right).$$

Da qui, scegliendo x' infinitamente piccolo, si ottiene

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{V-v} + \frac{1}{V+v}\right)\frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{1}{V-v}\frac{\partial\tau}{\partial t},$$

ovvero

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{v}{V^2-v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t} = 0.$$

È da notare che, invece dell'origine delle coordinate, avremmo potuto scegliere qualunque altro punto come origine del raggio di luce, e che dunque l'equazione appena derivata vale per qualunque valore di x', y, z.

Tenendo presente che la luce, se la si osserva dal sistema stazionario, si propaga lungo gli assi H[2] e Z sempre con velocità $\sqrt{V^2-v^2}$, un ragionamento analogo – applicato a tali assi – fornisce

$$\frac{\partial\tau}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial z} = 0.$$

Poiché τ è una funzione *lineare*, da queste equazioni discende

$$\tau = a\left(t - \frac{v}{V^2-v^2}\,x'\right),$$

dove a è una funzione, per ora incognita, $\varphi(v)$, e si è assunto, per brevità, che nell'origine di k, per $\tau = 0$ sia $t = 0$.

Sfruttando questo risultato, possiamo facilmente determinare le quantità ξ, η, ζ esprimendo in equazioni il fatto che (come esige il principio della costanza della velocità della luce unito al principio di relatività) la luce si propaga con velocità V anche quando viene misurata nel sistema in moto. Per un raggio di luce emesso al tempo $\tau = 0$ nella direzione delle ξ crescenti, abbiamo

$$\xi = V\tau,$$

ovvero

$$\xi = aV\left(t - \frac{v}{V^2-v^2}\,x'\right).$$

Se la si misura nel sistema stazionario, tuttavia, la velocità con cui si propaga il raggio di luce rispetto all'origine di k è $V - v$, cosicché

$$\frac{x'}{V-v} = t.$$

Sostituendo questo valore di t nell'equazione per ξ, otteniamo

$$\xi = a\,\frac{V^2}{V^2-v^2}\,x'.$$

Considerando raggi di luce in moto lungo gli altri due assi, si ha analogamente che

$$\eta = V\tau = aV\left(t - \frac{v}{V^2-v^2}\,x'\right),$$

dove

$$\frac{y}{\sqrt{V^2-v^2}} = t; \qquad x' = 0;$$

quindi

$$\eta = a\,\frac{V}{\sqrt{V^2-v^2}}\,y$$

e

$$\zeta = a\,\frac{V}{\sqrt{V^2-v^2}}\,z.$$

Se sostituiamo a x' il suo valore, otteniamo

$$\tau = \varphi(v)\,\beta\left(t - \frac{v}{V^2}\,x\right),$$

$$\xi = \varphi(v)\,\beta(x - vt),$$

$$\eta = \varphi(v)\,y,$$

$$\zeta = \varphi(v)z,$$

dove

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}$$

e φ è una funzione, per ora ancora incognita, di v. Se non si fanno assunzioni riguardo alla posizione iniziale del sistema in moto e al punto di τ assunto come zero, allora occorre aggiungere una costante al secondo membro di ciascuna di queste equazioni.

Dobbiamo ora dimostrare che, misurato nel sistema in moto, ogni raggio luminoso si propaga con velocità V, se, come abbiamo assunto, lo stesso avviene nel sistema stazionario; infatti, non abbiamo ancora provato che il principio della costanza della velocità della luce è compatibile con il principio di relatività.

Al tempo $t = \tau = 0$, supponiamo che dall'origine delle coordinate, origine in quell'istante comune a entrambi i sistemi, venga emessa un'onda sferica, che si propaghi nel sistema K con velocità V. Se (x, y, z) è un punto raggiunto dall'onda, si ha perciò

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2t^2.$$

Da qui, utilizzando le nostre equazioni di trasformazione, dopo un semplice calcolo otteniamo

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2\tau^2.$$

L'onda considerata è dunque sferica con velocità di propagazione V anche quando viene osservata nel sistema in moto. Ciò prova che i nostri due principi fondamentali sono fra loro compatibili[3].

Le equazioni di trasformazione che abbiamo derivato contengono anche una funzione incognita φ di v, che ora vogliamo determinare.

A questo scopo, introduciamo un terzo sistema di coordinate K' il quale, rispetto al sistema k, si muova di moto traslatorio parallelamente all'asse Ξ,[4] in modo che la sua origine si muova lungo l'asse Ξ con velocità $-v$. Supponiamo che tutte e tre le origini delle coordinate coincidano all'istante $t = 0$, e che il tempo t' del sistema K' sia nullo per $t = x = y = z = 0$. Indicate con x', y', z' le coordinate misurate nel sistema K', con una duplice applicazione delle nostre equazioni di trasformazione, otteniamo

$$\begin{aligned}
t' &= \varphi(-v)\beta(-v)\left\{t + \frac{v}{V^2}\,\xi\right\} &&= \varphi(v)\varphi(-v)t,\\
x' &= \varphi(-v)\beta(-v)\{\xi + v\tau\} &&= \varphi(v)\varphi(-v)x,\\
y' &= \varphi(-v)\eta &&= \varphi(v)\varphi(-v)y,\\
z' &= \varphi(-v)\zeta &&= \varphi(v)\varphi(-v)z.
\end{aligned}$$

Poiché le relazioni fra x', y', z' e x, y, z non contengono il tempo t, i sistemi K e K' sono in quiete l'uno rispetto all'altro, ed è evidente che la trasformazione da K a K' deve essere la trasformazione identica. Quindi,

$$\varphi(v)\varphi(-v) = 1.$$

Indaghiamo ora il significato di $\varphi(v)$. Concentriamo la nostra attenzione su quella porzione dell'asse H del sistema k compresa fra i punti $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ e $\xi = 0$, $\eta = l$, $\zeta = 0$. Questa porzione dell'asse H rappresenta un'asta che, rispetto al sistema K, si muove con velocità v perpendicolarmente al proprio asse e le cui estremità hanno in K coordinate

$$x_1 = vt, \quad y_1 = \frac{l}{\varphi(v)}, \quad z_1 = 0$$

e

$$x_2 = vt, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = 0.$$

La lunghezza dell'asta, misurata in K, è dunque $l/\varphi(v)$; ciò fornisce il significato della funzione φ. Per ragioni di simmetria, è ora evidente che, misurata nel sistema stazionario, la lunghezza di un'asta che si muova perpendicolarmente al proprio asse può dipendere solo dalla velocità e non dalla direzione e dal senso del movimento. Perciò, misurata nel sistema stazionario, la lunghezza dell'asta in moto non cambia se si sostituisce v con $-v$. Da qui concludiamo che:

$$\frac{l}{\varphi(v)} = \frac{l}{\varphi(-v)},$$

ossia

$$\varphi(v) = \varphi(-v).$$

Da questa relazione e da quella trovata più sopra segue che $\varphi(v) = 1$, cosicché le equazioni di trasformazione ottenute diventano

$$\tau = \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right),$$

$$\xi = \beta(x - vt),$$

$$\eta = y,$$

$$\zeta = z,$$

dove

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

4. *Significato fisico delle equazioni ottenute riguardo a corpi rigidi e orologi in moto*

Consideriamo una sfera rigida[3] di raggio R in quiete rispetto al sistema in moto k e il cui centro coincida con l'origine delle coordinate. L'equazione della superficie di questa sfera, che si muove con velocità v rispetto al sistema K, è

[3] Ossia, un corpo che, esaminato in quiete, abbia forma sferica.

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2.$$

Espressa in termini di x, y, z, l'equazione di questa superficie al tempo $t = 0$, è

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^2} + y^2 + z^2 = R^2.$$

Un corpo rigido che, misurato in quiete, ha forma sferica, assume quando è in movimento – considerato dal sistema stazionario – la forma di un ellissoide di rotazione di assi

$$R\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2},\ R,\ R.$$

Mentre le dimensioni Y e Z della sfera (e dunque anche di un corpo rigido di forma qualunque) non appaiono modificate dal movimento, la dimensione X risulta contratta nel rapporto $1 : \sqrt{1 - (v/V)^2}$, così la contrazione è tanto maggiore quanto più grande è il valore di v. Per $v = V$, tutti gli oggetti in moto – considerati dal sistema «stazionario» – si accorciano fino a risultare strutture appiattite. Per velocità superiori a quella della luce, le nostre considerazioni perdono significato; come vedremo più avanti, nella nostra teoria la velocità della luce gioca, sotto il profilo fisico, il ruolo di una velocità infinitamente grande.

È chiaro che gli stessi risultati si applicano a corpi in quiete nel sistema «stazionario» quando vengano considerati da un sistema in moto uniforme.

Immaginiamo inoltre che uno degli orologi, atto a segnare il tempo t quando sia in quiete rispetto al sistema stazionario, e il tempo τ quando sia in quiete rispetto al sistema in moto, venga posto nell'origine delle coordinate di k e regolato in modo da indicare il tempo τ. Qual è il ritmo di questo orologio considerato dal sistema stazionario?

Le grandezze x, t e τ che si riferiscono alla posizione di tale orologio soddisfano evidentemente le equazioni

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}\left(t - \frac{v}{V^2}x\right)$$

e

$$x = vt.$$

Abbiamo così

$$\tau = t\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2} = t - \left(1-\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)t,$$

da cui segue che l'orologio, considerato dal sistema stazionario, è in ritardo ogni secondo di $(1 - \sqrt{1-(v/V)^2})$ secondi, ovvero, a meno di quantità infinitesime del quart'ordine o di ordine superiore, di $\frac{1}{2}(v/V)^2$ secondi.

Ciò comporta una singolare conseguenza: se nei punti A e B di K si trovano orologi stazionari sincronizzati relativamente al sistema stazionario, e se l'orologio in A viene trasportato in B lungo la congiungente AB con velocità v, allora, al suo arrivo in B, esso non sarà più sincronizzato con l'orologio rimasto in B fin dal principio, ma ritarderà, rispetto a questo, di $\frac{1}{2}\,tv^2/V^2$ secondi (a meno di quantità infinitesime del quart'ordine o di ordini superiori), dove t è il tempo impiegato per passare da A a B.

Vediamo subito che questo risultato vale anche quando l'orologio si sposta da A a B lungo una qualsiasi spezzata, e persino quando i punti A e B coincidono[5].

Supponendo che quanto mostrato per una spezzata valga anche per una curva regolare, giungiamo dunque al seguente risultato: dati due orologi sincronizzati posti in A, se uno di essi viene spostato lungo una curva chiusa con velocità costante, fino a ritornare dopo t secondi di nuovo in A, allora, al suo arrivo in A, questo orologio ritarderà di $\frac{1}{2}t(v/V)^2$ secondi rispetto a quello che non è stato spostato. Concludiamo dunque che all'equatore un orologio a bilanciere[6] sarà più lento, in misura minima, di un orologio del tutto identico e sottoposto alle medesime condizioni ma situato in uno dei poli terrestri.

5. *Composizione delle velocità*

Nel sistema k, in moto con velocità V lungo l'asse X del sistema K, un punto si muova secondo le equazioni

$$\xi = w_\xi \tau,$$
$$\eta = w_\eta \tau,$$
$$\zeta = 0.$$

dove w_ξ e w_η indicano delle costanti.

Cerchiamo il moto del punto relativamente al sistema K. Introducendo nelle precedenti equazioni le quantità x, y, z, t mediante le equazioni di trasformazione ricavate nel paragrafo 3, otteniamo

$$x = \frac{w_\xi + v}{1 + \frac{vw_\xi}{V^2}}\,t,$$

$$y = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 + \frac{vw_\xi}{V^2}}\,w_\eta t,$$

$$z = 0.$$

Così, in base alla nostra teoria, la composizione vettoriale delle velocità vale solo in prima approssimazione. Sia

$$U^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

$$w^2 = w_\xi^2 + w_\eta^2$$

e

$$\alpha = \arctan\frac{w_y}{w_x};$$ [7]

α è dunque da considerare come l'angolo tra le velocità v e w. Con un semplice calcolo otteniamo

$$U = \frac{\sqrt{(v^2+w^2+2vw\cos\alpha) - \left(\frac{vw\sin\alpha}{V}\right)^2}}{1 + \frac{vw\cos\alpha}{V^2}}.$$

È degno di nota il fatto che v e w entrano in maniera simmetrica nell'espressione della velocità risultante. Se anche w ha la direzione dell'asse X (asse Ξ), si ha

$$U = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}}.$$

Da questa equazione segue che la composizione di due velocità minori di V fornisce sempre una velocità minore di V. Infatti, se poniamo $v = V - \kappa$, e $w = V - \lambda$, dove κ e λ sono positive e minori di V, si ha

$$U = V\frac{2V - \kappa - \lambda}{2V - \kappa - \lambda + \frac{\kappa\lambda}{V}} < V.$$

Si deduce anche che, qualora venga composta con una «velocità subluminale», la velocità della luce V rimane inalterata. In questo caso, otteniamo infatti

$$U = \frac{V + w}{1 + \frac{w}{V}} = V.$$

Nel caso in cui V e w abbiano la stessa direzione, si sarebbe potuto ottenere la formula relativa a U anche componendo due trasformazioni come indicato nel paragrafo 3. Se, in aggiunta ai sistemi k e K, che compaiono in quel paragrafo, introduciamo un terzo sistema di coordinate k' che si muova parallelamente a k e la cui origine si muova con velocità w lungo l'asse Ξ, le

equazioni che si ottengono fra x, y, z, t e le corrispondenti quantità di k' differiscono da quelle trovate nel paragrafo 3 solo in quanto «v» è sostituita con l'espressione

$$\frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}};$$

si vede allora che queste trasformazioni parallele formano – come è d'obbligo – un gruppo.

Abbiamo derivato le leggi necessarie della cinematica corrispondente ai nostri due principi, e procediano ora ad applicarle all'elettrodinamica.

Parte elettrodinamica

6. *Trasformazione delle equazioni di Maxwell-Hertz per lo spazio vuoto. Sulla natura delle forze elettromotrici che si originano dal moto in un campo magnetico*

Supponiamo che per il sistema stazionario K valgano le equazioni di Maxwell-Hertz per lo spazio vuoto, cosicché si ha

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},$$

dove (X, Y, Z) indica il vettore della forza elettrica e (L, M, N) il vettore della forza magnetica.

Se applichiamo a queste equazioni le trasformazioni ricavate nel paragrafo 3, allo scopo di riferire i processi elettromagnetici al sistema di coordinate in moto con velocità v là introdotto, otteniamo le seguente equazioni:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)\right] - \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right)\right],$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)\right] = \frac{\partial L}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)\right],$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right)\right] = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right)\right] - \frac{\partial L}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)\right] - \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right)\right],$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right)\right] = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right)\right] - \frac{\partial X}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)\right] = \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)\right],$$

dove

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Il principio di relatività esige che le equazioni di Maxwell-Hertz per lo spazio vuoto, se sono valide nel sistema K, lo siano anche nel sistema k, cioè che i vettori della forza elettrica e delle forza magnetica – (X', Y', Z') e (L', M', N') – del sistema in moto k, definiti in esso per mezzo delle loro azioni ponderomotrici rispettivamente sulle cariche elettriche e magnetiche, soddisfino le equazioni

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X'}{\partial \tau} = \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial L'}{\partial \tau} = \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y'}{\partial \tau} = \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial M'}{\partial \tau} = \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z'}{\partial \tau} = \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial N'}{\partial \tau} = \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi}.$$

È chiaro che i due sistemi di equazioni trovati per il sistema k devono esprimere esattamente la stessa cosa, poiché entrambi sono equivalenti alle equazioni di Maxwell-Hertz per il sistema K. Dato che, inoltre, le equazioni per i due sistemi sono conformi, fatta eccezione per i simboli che rappresentano i vettori, segue che le funzioni che vi compaiono in posizioni corrispondenti devono concordare a meno di un fattore $\psi(v)$, comune a tutte le funzioni di uno dei sistemi di equazioni e indipendente da ξ, η, ζ, e τ, ma dipendente da v. Si hanno dunque le relazioni:

$$X' = \psi(v)X \qquad L' = \psi(v)L,$$

$$Y' = \psi(v)\beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right), \qquad M' = \psi(v)\beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right),$$

$$Z' = \psi(v)\beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right), \qquad N' = \psi(v)\beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right).$$

Se ora invertiamo questo sistema di equazioni, in primo luogo risolvendo le equazioni appena ricavate, e secondariamente applicando a queste equazioni la trasformazione inversa (da k a K), caratterizzata dalla velocità $-v$, abbiamo, tenendo a mente che i due sistemi di equazioni così ottenuti devono essere identici,

$$\varphi(v) \cdot \varphi(-v) = 1.$$

Per ragioni di simmetria[4], segue inoltre che

$$\varphi(v) = \varphi(-v);$$

[4] Nell'ipotesi, per esempio, che $X = Y = Z = L = M = 0$ e $N \neq 0$, allora, per ragioni di simmetria, è chiaro che se v cambia segno senza che venga alterato il suo valore numerico, anche Y' deve cambiare segno senza che cambi il suo valore numerico.

quindi

$$\varphi(v) = 1$$

e le nostre equazioni assumono la forma

$$X' = X \qquad L' = L,$$

$$Y' = \beta\left(Y - \frac{v}{V} N\right), \qquad M' = \beta\left(M + \frac{v}{V} Z\right),$$

$$Z' = \beta\left(Z + \frac{v}{V} M\right), \qquad N' = \beta\left(N - \frac{v}{V} Y\right).$$

Riguardo all'interpretazione di queste equazioni, osserviamo quanto segue: immaginiamo di avere una carica elettrica puntiforme, di grandezza unitaria misurata nel sistema stazionario, ossia tale che, quando è in quiete nel sistema stazionario, eserciti una forza di 1 dine su una carica uguale posta ad una distanza di 1 centimetro. Secondo il principio di relatività, questa carica elettrica è ancora unitaria se misurata nel sistema in moto. Se questa carica elettrica è in quiete rispetto al sistema stazionario, allora il vettore (X, Y, Z) è, per definizione, uguale alla forza agente su di essa. Se, invece, tale carica è stazionario rispetto al sistema in moto (almeno nell'istante considerato), allora la forza agente su di essa, misurata nel sistema in moto, è uguale al vettore (X', Y', Z'). Le prime tre equazioni precedenti si possono pertanto tradurre in parole nei due modi seguenti:

1. Se una carica elettrica puntiforme unitaria si muove in un campo elettromagnetico, su di essa agisce, oltre alla forza elettrica, una «forza elettromotrice» che, trascurando termini moltiplicati per potenze di secondo grado e di grado superiore di v/V, è uguale al prodotto vettoriale della velocità della carica e della forza magnetica, diviso per la velocità della luce (antico modo di esprimersi).

2. Se una carica elettrica puntiforme unitaria si muove in un campo elettromagnetico, la forza agente su di essa è uguale alla

forza elettrica presente là dove la carica unitaria si trova e che si ottiene trasformando il campo in un sistema di coordinate in quiete rispetto alla carica unitaria (nuovo modo di esprimersi).

Analoghe osservazioni valgono per le «forze magnetomotrici»[8]. Si può vedere che nella teoria qui sviluppata, la forza elettromotrice ha il solo ruolo di concetto ausiliario, la cui introduzione si deve al fatto che le forze elettriche e magnetiche non hanno esistenza indipendente dallo stato di moto del sistema di coordinate.

È inoltre chiaro che scompare l'asimmetria, menzionata nell'introduzione, relativa all'interpretazione delle correnti prodotte dal moto relativo di un magnete e di un conduttore. Per di più, si svuotano di significato le questioni relative alla «sede» delle forze elettromotrici elettrodinamiche (macchine unipolari).

7. *Teoria dell'effetto Doppler e dell'aberrazione*

Nel sistema K, molto lontana dall'origine delle coordinate, si trovi una sorgente di onde elettrodinamiche che, in una parte di spazio contenente l'origine delle coordinate, siano rappresentate con sufficiente precisione dalle equazioni

$$X = X_0 \sin \Phi, \quad L = L_0 \sin \Phi,$$

$$Y = Y_0 \sin \Phi, \quad M = M_0 \sin \Phi, \qquad \Phi = \omega\left(t - \frac{ax + by + cz}{V}\right).$$

$$Z = Z_0 \sin \Phi, \quad N = N_0 \sin \Phi,$$

Qui (X_0, Y_0, Z_0) e (L_0, M_0, N_0) sono i vettori che determinano l'ampiezza del treno d'onde, e a, b, c sono i coseni direttori delle normali alle onde.

Vogliamo conoscere la natura di queste onde quando esse vengono esaminate da un osservatore in quiete nel sistema in moto k. Applicando le equazioni di trasformazione per le forze elettriche e magnetiche trovate nel paragrafo 6 e quelle per le coordinate e il tempo trovate nel paragrafo 3, otteniamo direttamente:

$$X' = X_0 \sin \Phi', \qquad L' = L_0 \sin \Phi',$$

$$Y' = \beta\left(Y_0 - \frac{v}{V} N_0\right) \sin \Phi', \qquad M' = \beta\left(M_0 + \frac{v}{V} Z_0\right) \sin \Phi',$$

$$Z' = \beta\left(Z_0 + \frac{v}{V} M_0\right) \sin \Phi', \qquad N' = \beta\left(N_0 - \frac{v}{V} Y_0\right) \sin \Phi',$$

$$\Phi' = \omega'\left(\tau - \frac{a'\xi + b'\eta + c'\zeta}{V}\right),$$

dove si è posto

$$\omega' = \omega\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right),$$

$$a' = \frac{a - \frac{v}{V}}{1 - a\frac{v}{V}},$$

$$b' = \frac{b}{\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right)},$$

$$c' = \frac{c}{\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right)}.$$

Dall'equazione per ω' segue che se un osservatore si muove con velocità v relativamente a una sorgente di luce infinitamente distante di frequenza ν, in modo che la congiungente «sorgente di luce-osservatore» formi un angolo φ con la velocità dell'osservatore riferita a un sistema di coordinate in quiete rispetto

alla sorgente, allora la frequenza ν' della luce percepita dall'osservatore, è data dall'equazione

$$\nu' = \nu \frac{1 - \cos\varphi \frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Questa è la formula dell'effetto Doppler per una velocità arbitraria. Per $\varphi = 0$ l'equazione assume la semplice forma

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}.$$

Si vede che, contrariamente alla concezione usuale, quando $v = -v$, si ha $\nu = \infty$[9].

Se φ' denota l'angolo fra la normale alle onde (direzione del raggio) nel sistema in moto e la congiungente «sorgente di luce-osservatore»[10], l'equazione per α'[11] assume la forma

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}.$$

Questa equazione esprime la legge dell'aberrazione nella sua forma più generale. Per $\varphi = \pi/2$, essa assume la semplice forma

$$\cos\varphi' = -\frac{v}{V}.$$

Dobbiamo ancora trovare l'ampiezza delle onde così come essa appare nel sistema in moto. Designando con A e A' le ampiezze della forza elettrica o magnetica, rispettivamente nel sistema stazionario e nel sistema in moto, otteniamo

$$A'^2 = A^2 \frac{\left(1 - \frac{v}{V}\cos\varphi\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

che, per $\varphi = 0$ assume la forma più semplice:

$$A'^2 = A^2 \frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}.$$

A un osservatore che si avvicini a una sorgente di luce con velocità V, tale sorgente, come discende da questi risultati, apparirà di intensità infinita.

8. *Trasformazione dell'energia dei raggi luminosi. Teoria della pressione di radiazione esercitata su specchi perfetti*

Poiché $A^2/8\pi$ è uguale all'energia della luce per unità di volume, per il principio di relatività dobbiamo considerare $A'^2/8\pi$ come l'energia della luce nel sistema in moto. Perciò A'^2/A^2 dovrebbe essere il rapporto tra l'energia «misurata in moto» e l'energia «misurata in quiete» di un dato complesso luminoso, qualora il volume di quest'ultimo risultasse lo stesso misurato in K e in k. Tuttavia, non è questo il nostro caso. Se a, b, c sono i coseni direttori della normale alle onde di luce nel sistema stazionario, allora gli elementi della superficie sferica

$$(x - Vat)^2 + (y - Vbt)^2 + (z - Vct)^2 = R^2$$

in moto alla velocità della luce non sono attraversati da alcun flusso di energia; possiamo dunque dire che questa superficie racchiude permanentemente lo stesso complesso luminoso. Ci chiediamo qual è la quantità di energia racchiusa da tale superficie considerata nel sistema k, ossia l'energia del complesso luminoso rispetto a k.

Considerata nel sistema in moto, la superficie sferica è una superficie ellissoidale la cui equazione al tempo $\tau = 0$ è

$$\left(\beta\xi - a\beta \frac{v}{V} \xi\right)^2 + \left(\eta - b\beta \frac{v}{V} \xi\right)^2 + \left(\zeta - c\beta \frac{v}{V} \xi\right)^2 = R^2.$$

Se S indica il volume della sfera e S' quello dell'ellissoide, un semplice calcolo mostra che

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}.$$

Se chiamiamo E l'energia della luce racchiusa da questa superficie quando venga misurata nel sistema stazionario ed E' quando venga misurata nel sistema in moto, otteniamo

$$\frac{E'}{E} = \frac{\frac{A'^2}{8\pi} S'}{\frac{A^2}{8\pi} S} = \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

che, per $\varphi = 0$, si semplifica in

$$\frac{E'}{E} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}.$$

È degno di nota il fatto che l'energia e la frequenza di un complesso luminoso varino in funzione dello stato di moto dell'osservatore secondo la stessa legge.

Sia il piano $\xi = 0$ una superficie perfettamente riflettente, su cui vengono riflesse le onde piane considerate nel paragrafo 7. Vogliamo esaminare la pressione della luce esercitata sulla superficie riflettente, nonché direzione, frequenza e intensità della luce dopo la riflessione.

La luce incidente sia definita mediante le grandezze A, $\cos \varphi$, e ν (riferite al sistema K). Considerate relativamente a k, le corrispondenti grandezze sono

$$A' = A \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} ,$$

$$\cos \varphi' = \frac{\cos \varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi} ,$$

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} .$$

Riferendo il processo al sistema k, otteniamo per la luce riflessa

$$A'' = A',$$

$$\cos \varphi'' = - \cos \varphi',$$

$$\nu'' = \nu'.$$

Infine, tornando con una trasformazione inversa al sistema stazionario K, si ha per la luce riflessa

$$A''' = A'' \frac{1 + \frac{v}{V} \cos \varphi''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = A \frac{1 - 2 \frac{v}{V} \cos \varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2} ,$$

$$\cos \varphi''' = \frac{\cos \varphi'' + \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V} \cos \varphi''} = - \frac{\left(1 + \left(\frac{v}{V}\right)^2\right) \cos \varphi - 2 \frac{v}{V}}{1 - 2 \frac{v}{V} \cos \varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2} ,$$

$$\nu''' = \nu'' \frac{1 + \frac{v}{V} \cos \varphi''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = \nu \frac{1 - 2 \frac{v}{V} \cos \varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{V}\right)^2} . \quad [12]$$

L'energia (misurata nel sistema stazionario) che incide su una superficie unitaria dello specchio nell'unità di tempo è evidentemente $A^2/8\pi \ (V \cos \varphi - v)$. L'energia che nell'unità di tempo lascia l'unità di superficie dello specchio è $A'''^2/8\pi(-V \cos \varphi''' + v)$. Per il principio della conservazione dell'energia, la differenza fra queste due espressioni è il lavoro compiuto dalla pressione della luce nell'unità di tempo. Ponendo tale lavoro uguale a $P \cdot v$, dove P è la pressione della luce, otteniamo

$$P = 2 \frac{A^2}{8\pi} \frac{\left(\cos \varphi - \frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2} .$$

In prima approssimazione, in accordo con l'esperienza e con altre teorie, si ottiene

$$P = 2 \frac{A^2}{8\pi} \cos^2 \varphi.$$

Tutti i problemi dell'ottica dei corpi in movimento possono essere risolti con il metodo qui impiegato. L'essenziale è che il campo elettrico e il campo magnetico della luce, la quale è influenzata da un corpo in movimento, siano trasformati in un sistema di coordinate in quiete rispetto a quel corpo. In tal modo, tutti i problemi dell'ottica dei corpi in moto vengono ricondotti a una serie di problemi dell'ottica dei corpi in quiete.

9. *Trasformazione delle equazioni di Maxwell-Hertz tenendo conto delle correnti di convezione*

Partiamo dalle equazioni

$$\frac{1}{V}\left\{u_x\rho + \frac{\partial X}{\partial t}\right\} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_y\rho + \frac{\partial Y}{\partial t}\right\} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_z\rho + \frac{\partial Z}{\partial t}\right\} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},$$

dove

$$\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

indica la densità di carica moltiplicata per 4π, e (u_x, u_y, u_z) designa il vettore della velocità della carica. Nell'ipotesi che le cariche elettriche siano sempre legate a piccoli corpi rigidi (ioni, elettroni), queste equazioni rappresentano il fondamento elettromagnetico dell'elettrodinamica e dell'ottica dei corpi in movimento di Lorentz.

Se, applicando le equazioni di trasformazione presentate nei paragrafi 3 e 6, trasformiamo nel sistema k queste equazioni, supposte valide nel sistema K, otteniamo

$$\frac{1}{V}\left\{u_\xi\rho' + \frac{\partial X'}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial L'}{\partial \tau} = \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_\eta\rho' + \frac{\partial Y'}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial M'}{\partial \tau} = \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_\zeta\rho' + \frac{\partial Z'}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial N'}{\partial \tau} = \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi},$$

dove

$$u_\xi = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{V^2}},$$

$$u_\eta = \frac{u_y}{\beta\left(1 - \frac{u_x v}{V^2}\right)},$$

$$u_\zeta = \frac{u_z}{\beta\left(1 - \frac{u_x v}{V^2}\right)},$$

e

$$\rho' = \frac{\partial X'}{\partial \xi} + \frac{\partial Y'}{\partial \eta} + \frac{\partial Z'}{\partial \zeta} = \beta\left(1 - \frac{\mu_x v}{V^2}\right)\rho.$$

Poiché – come discende dalla legge di composizione della velocità (paragrafo 5) – il vettore (u_ξ, u_η, u_ζ) è in realtà la velocità delle cariche elettriche misurata nel sistema k, abbiamo dunque dimostrato che, sulla base dei nostri principi cinematici, il fondamento elettrodinamico della teoria di Lorentz dell'elettrodinamica dei corpi in movimento è conforme al principio di relatività.

Permettetemi di aggiungere brevemente che, dalle equazioni che abbiamo ricavato, può essere facilmente dedotta la seguente importante asserzione: se un corpo elettricamente carico si muove nello spazio di moto arbitrario senza che la sua carica venga modificata quando la si osserva da un sistema di coordinate solidale con esso, allora tale carica rimane costante anche quando la si osserva dal sistema «in quiete» K.

10. *Dinamica dell'elettrone (lentamente accelerato)*

Sia data una particella elettricamente carica con carica ε (nel seguito la chiameremo «elettrone») in moto in un campo elettromagnetico; riguardo alla sua equazione del moto, assumiamo quanto segue:

Se, in un dato istante, l'elettrone è in quiete, il suo moto, nell'istante di tempo successivo, avverrà secondo le equazioni

$$\mu \frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon X,$$

$$\mu \frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon Y,$$

$$\mu \frac{d^2z}{dt^2} = \varepsilon Z,$$

dove x, y, z indicano le coordinate dell'elettrone e μ la sua massa, a condizione che il suo moto sia lento.

Supponiamo poi che la velocità dell'elettrone in un dato istante sia v. Vogliamo sapere quale legge governerà il moto dell'elettrone nell'istante di tempo immediatamente successivo.

Senza perdere in generalità, possiamo assumere – e infatti così faremo – che l'elettrone, nell'istante di tempo considerato, si trovi nell'origine delle coordinate e si muova con velocità v lungo l'asse X del sistema K. È quindi evidente che nell'istante dato ($t = 0$), l'elettrone è in quiete relativamente a un sistema di coordinate k in moto con velocità costante v parallela all'asse X.

In base all'assunzione precedente, combinata con il principio di relatività, è chiaro che, considerato dal sistema k, l'elettrone, nell'intervallo di tempo immediatamente seguente (per piccoli valori di t), si muoverà secondo le equazioni

$$\mu \frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \varepsilon X',$$

$$\mu \frac{d^2\eta}{d\tau^2} = \varepsilon Y',$$

$$\mu \frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = \varepsilon Z',$$

dove i simboli ξ, η, ζ, τ, X', Y', Z' sono tutti riferiti al sistema k. Se poniamo inoltre che, per $t = x = y = z = 0$, valga $\tau = \xi = \eta = \zeta = 0$, allora si possono applicare le equazioni di trasformazione citate nei paragrafi 3 e 6, cosicché

$$\tau = \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right),$$

$$\xi = \beta(x - vt), \qquad X' = x,$$

$$\eta = y, \qquad Y' = \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right),$$

$$\zeta = z, \qquad Z' = \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right).$$

Mediante queste relazioni, trasformiamo le precedenti equazioni del moto dal sistema k al sistema K, e otteniamo

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{1}{\beta^3}X, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{1}{\beta}\left(Y - \frac{v}{V}N\right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{1}{\beta}\left(Z + \frac{v}{V}M\right). \end{aligned}\right. \qquad \text{(A)}$$

Seguendo l'approccio usuale, esaminiamo ora la massa «longitudinale» e la massa «trasversale» dell'elettrone in moto. Scriviamo le equazioni (A) nella forma

$$\mu\beta^3 \frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon X = \varepsilon X',$$

$$\mu\beta^2 \frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon\beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right) = \varepsilon Y',$$

$$\mu\beta^2 \frac{d^2z}{dt^2} = \varepsilon\beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right) = \varepsilon Z',$$

e osserviamo dapprima che $\varepsilon X'$, $\varepsilon Y'$, $\varepsilon Z'$ sono le componenti della forza ponderomotrice agente sull'elettrone, considerate in un sistema in moto che, in quell'istante, si muove con la stessa velocità dell'elettrone (questa forza potrebbe venire misurata, per esempio, con una bilancia a molla in quiete nell'ultimo sistema). Se designiamo[13] tale forza semplicemente come «la forza agente sull'elettrone», e consideriamo ancora valida l'equazione

$$\text{Massa} \times \text{Accelerazione} = \text{Forza},$$

stabilendo, inoltre, che le accelerazioni siano misurate nel sistema stazionario K, allora dalle equazioni precedenti discendono le definizioni:

$$\text{Massa longitudinale} = \frac{\mu}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^3},$$

$$\text{Massa trasversale} = \frac{\mu}{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

Naturalmente, con definizioni diverse di forza e accelerazione, si otterrebbero per queste masse valori differenti; ciò dimostra che dobbiamo procedere con estrema cautela nel confrontare tra loro teorie diverse sul moto dell'elettrone.

Si dovrebbe notare che questi risultati relativi alla massa sono validi anche per punti materiali ponderabili, poiché un punto materiale ponderabile può essere considerato equivalente a un elettrone (nel senso da noi attribuito alla parola) mediante l'aggiunta di una carica elettrica *piccola a piacere*.

Determiniamo ora l'energia cinetica di un elettrone. Se un elettrone, inizialmente in quiete nell'origine delle coordinate del sistema K, comincia a spostarsi lungo l'asse X sotto l'azione di una forza elettrostatica X, è chiaro che l'energia sottratta al

campo elettrostatico ha il valore $\int \varepsilon X dx$. Poiché si suppone che l'elettrone acceleri lentamente, e dunque non possa cedere energia sotto forma di radiazione, l'energia sottratta al campo elettrostatico deve essere posta uguale all'energia cinetica W dell'elettrone. Tenendo presente che la prima delle equazioni (A) vale durante l'intero processo di moto, otteniamo

$$W = \int \varepsilon X dx = \int_0^v \beta^3 v\, dv = \mu V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

Per $v = V$, W diviene dunque infinitamente grande. Come nel caso di nostri precedenti risultati, velocità superiori a quella della luce non sono possibili.

In virtù dell'argomento illustrato sopra, questa espressione per l'energia cinetica deve valere anche per masse ponderabili.

Elenchiamo ora le proprietà del moto dell'elettrone che discendono dal sistema di equazioni (A) e che sono accessibili all'esperienza.

1. Dalla seconda equazione del sistema (A) segue che una forza elettrica Y e una forza magnetica N esercitano su un elettrone in moto con velocità v un'azione deviante ugualmente intensa quando $Y = Nv/V$. Vediamo dunque che, mediante la nostra teoria, si può determinare la velocità dell'elettrone, qualunque essa sia, dal rapporto fra la deviazione magnetica A_m e la deviazione elettrica A_e, applicando la legge

$$\frac{A_m}{A_e} = \frac{v}{V}.$$

Questa relazione si presta a una verifica sperimentale, poiché la velocità dell'elettrone può essere misurata anche direttamente, ad esempio per mezzo di campi elettrici e magnetici rapidamente oscillanti.

2. Dalla derivazione dell'energia cinetica di un elettrone segue che la differenza di potenziale attraversata dall'elettrone

e la velocità v da esso raggiunta devono essere legate dalla relazione

$$P = \int X\,dx = \frac{\mu}{\varepsilon} V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

3. Calcoliamo il raggio di curvatura R della traiettoria dell'elettrone quando è presente (come unica forza deviante) una forza magnetica N, agente in direzione perpendicolare alla sua velocità. Dalla seconda delle equazioni (A) si ottiene:

$$-\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{v}{V} N \cdot \sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}$$

ovvero

$$R = V^2 \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{\frac{v}{V}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} \cdot \frac{1}{N}.$$

Queste tre relazioni esprimono compiutamente le leggi secondo cui, in base alla teoria che qui è stata illustrata, deve muoversi l'elettrone.

Per concludere, mi sia concesso menzionare l'amico e collega Michele Besso per avermi assistito fedelmente mentre lavoravo ai problemi discussi qui, e ringraziarlo per i numerosi e preziosi suggerimenti.

«Annalen der Physik» 17, 1905, pp. 891-921

[1] Nella versione del 1913, fu aggiunta una annotazione dopo «saranno valide»: «Da intendere, "saranno valide in prima approssimazione"». Quand'anche Einstein non abbia scritto le note supplementari a questo articolo, i contenuti di alcune di esse suggeriscono che egli fu opportunamente consultato.

[2] Einstein introduce i simboli Ξ, H, Z, per indicare le coordinate degli assi x', y', z' del sistema in moto.

[3] Nella versione del 1913, alla fine di questa riga venne apposta la seguente nota: «Le equazioni della trasformazione di Lorentz si possono ricavare in maniera più semplice direttamente osservando che, come conseguenza di quelle equazioni, la relazione $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - V^2\tau^2 = 0$ comporta l'altra $x^2 + y^2 + z^2 - V^2t^2 = 0$.

[4] Vedi la nota precedente.

[5] Questo risultato divenne famoso in seguito come «il paradosso degli orologi». Sembra sia stato Langevin, nel 1911, a introdurre per primo viaggiatori umani, dando così origine al nome alternativo «paradosso dei gemelli».

[6] Nella versione del 1913, dopo la parola «Unrhuhur» venne apposta la seguente nota: «A differenza di un "orologio a pendolo" che – dal punto di vista fisico – è un sistema, a cui appartiene la terra; ciò deve essere escluso».

[7] Questa frazione dovrebbe essere $\frac{w_\eta}{w_\xi}$.

[8] Il termine «forza magnetica mozionale» fu introdotto da Heaviside. Einstein definì in seguito la «forza magnetomotrice» come quella forza agente su una carica magnetica unitaria in moto in un campo elettrico. All'ordine di approssimazione utilizzato nella discussione della «forza elettromotrice», la forza magnetomotrice è data da $-1/V$ [$\mathbf{v}$, $\mathbf{E}$], dove $\mathbf{E} = (L, M, N)$, $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$, e la parentesi quadra indica un prodotto vettoriale.

[9] Corretto da Einstein in una copia in «per $v = -V$, $\nu' = \infty$».

[10] In ibid., «la congiungente "sorgente di luce-osservatore"» è stato cancellato e sostituito con «direzione di moto».

[11] Al posto di α dovrebbe aversi φ.

[12] In una copia, il denominatore nell'ultimo termine è stato corretto in «$1-(v/V)^2$».

[13] Nella versione del 1913, dopo la parola «designiamo» è stata apposta la seguente annotazione: «Come ha per primo osservato Planck, la definizione di forza qui data non è conveniente. È invece appropriato definire la forza in modo tale che i principi di conservazione della quantità del moto e dell'energia assumano la forma più semplice».